



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 15.02.2025**  
**CLASA a IX-a**  
**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**SUBIECTUL I (7 puncte)**Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

$$\left\{ \frac{x-2025}{x+2026} \right\} + \left[ \frac{2x+1}{x+2026} \right] = 1$$

**Soluție:**

Oficiu .....1p

Știm că  $\{x+n\} = \{x\} \quad (\forall) n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{ \frac{x-2025}{x+2026} \right\} = \left\{ \frac{x-2025}{x+2026} + 1 \right\} = \left\{ \frac{2x+1}{x+2026} \right\}$  .....3pEcuația devine:  $\left\{ \frac{2x+1}{x+2026} \right\} + \left[ \frac{2x+1}{x+2026} \right] = 1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x+2026} = 1$  .....2pFinalizare  $x=2025$  .....1p**SUBIECTUL II (7 puncte)**Dacă  $a, b, c \in (0, \infty)$  demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a}{b+2025c} + \frac{b}{c+2025a} + \frac{c}{a+2025b} \geq \frac{3}{2026}.$$

**Soluție:**

Oficiu .....1p

 $3(ab+bc+ac) \leq (a+b+c)^2 =$  .....1p

$$= \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+2025c}} \cdot \sqrt{a(b+2025c)} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+2025a}} \cdot \sqrt{b(c+2025a)} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+2025b}} \cdot \sqrt{c(a+2025b)} \right)^2 \stackrel{C.B.S.}{\geq}$$

$$\leq \left( \frac{a}{b+2025c} + \frac{b}{c+2025a} + \frac{c}{a+2025b} \right) \cdot (a(b+2025c) + b(c+2025a) + c(a+2025b)) =$$

$$= \left( \frac{a}{b+2025c} + \frac{b}{c+2025a} + \frac{c}{a+2025b} \right) \cdot (2026(ab+bc+ca))$$
 .....2p+2p

Finalizare: împărțim ambii membri prin  $2026(ab+bc+ac)$  și se obține inegalitatea

cerută. ....1p

**SUBIECTUL III (7 puncte)**

În planul triunghiului  $\triangle ABC$  se iau punctele  $D$  și  $M$  astfel încât:

$$26\overrightarrow{MA} + 24\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{AD} = \frac{12}{25}\overrightarrow{AB}.$$

Arătați că punctele  $C, M, D$  sunt coliniare.

**Soluție:**

Oficiu .....1p

Exprimăm vectorii  $\overrightarrow{MC}$  și  $\overrightarrow{CD}$  după 2 direcții necoliniare:  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$

$$26(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}) + 24(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \dots\dots\dots 1p$$

$$53\overrightarrow{MC} + 26\overrightarrow{CA} + 24\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MC} = \frac{26}{53}\overrightarrow{AC} + \frac{24}{53}\overrightarrow{BC} \dots\dots\dots 2p$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{12}{25}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \frac{12}{25}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -\frac{13}{25}\overrightarrow{AC} - \frac{12}{25}\overrightarrow{BC} \dots\dots\dots 2p$$

Finalizare: vectorii  $\overrightarrow{MC}$  și  $\overrightarrow{CD}$  sunt coliniari, deci punctele  $C, M, D$  sunt coliniare....1p

**SUBIECTUL IV (7 puncte)**

Fie  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} = 0$ . Arătați că  $a=b=c=0$ .

(Supliment Gazeta Matematică)

**Soluție:**

Oficiu .....1p

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = -c\sqrt{5} \quad /^2$$

$$\Rightarrow (a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2 = (-c\sqrt{5})^2 \Rightarrow 2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = 5c^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deoarece } a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ și } \sqrt{6} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a=0 \text{ sau } b=0 \dots\dots\dots 2p$$

Dacă  $a=0$ , înlocuind în relația dată  $\Rightarrow b\sqrt{3} + c\sqrt{5} = 0$ , iar dacă  $b \neq 0$ , atunci:

$$b\sqrt{3} = -c\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{5}} = -\frac{c}{b} \in \mathbb{Q}, \text{ fals. Deci } b=0 \Rightarrow c=0 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Analog cazul } b=0 \dots\dots\dots 1p$$